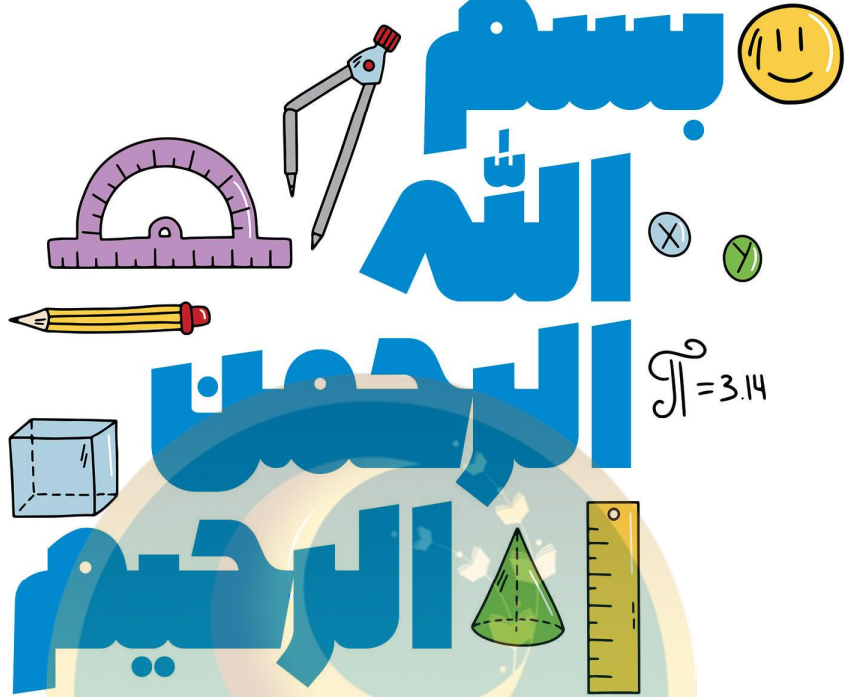


بِسْمِ
اللّٰهِ
الرَّحْمٰنِ
الرَّحِیْمِ



رياضه دهم



رشته ریاضه و تجربه
مؤلف: مهسا شفيع



سرشناسه: شفیعی، مهسا، ۱۳۸۱
عنوان و نام پدیدآورندگان: ریاضی دهم رشته ریاضی و تجربی / مولف مهسا شفیعی.
مشخصات نشر: تهران، ماهلین، ۱۴۰۲
مشخصات ظاهری: ۳۵۴ص: جدول. نمودار
شابک: ۹۷۸-۶۲۲-۹۰۶۱۲-۹-۹
وضعیت فهرست نویسی: فیپا
شماره کتاب شناسی ملی: ۹۵۲۱۸۹۸
اطلاعات رکورد کتابشناسی: فیپا

ISBN: 978-622-90612-9-9



9 786229 061299



ناشر: ماهلین
عنوان کتاب: ریاضی دهم رشته تجربی و ریاضی
مؤلف: مهسا شفیعی
تایپ و صفحه آرایی: انتشارات ماهلین
مصحح: ریحانه خورسندی
ویراستار علمی: فهیمه رئیسی
تصویرگر: ساناز موسوی فر
شمارگان: ۲۰۰ نسخه
قیمت: ۴۰۰۰۰۰ تومان



 Mahlin_books  Mahlin.books@gmail.com  ۰۹۱۲۴۴۹۰۶۲۵

هر گونه کپی برداری از این اثر بدون اجازه ناشر پیگرد قانونی دارد.





مقدمه ناشر



سلام به روی ماهتون... 😊

صدای من رو از آسمان نشر ایران می شنوید ، از ماهلین...

از ماهی که هدفش نوری نو برای توسعه ی دبیر هست ✨

ماهلین میگه...

میدونی رفیق!

مهم نیست شنبه باشه یا جمعه 🌱

مهم نیست اول ماه باشه یا آخر ماه...

هر روز واسه من فرصتیه که 🌧️

تصمیم بگیرم امروز یه قدم 🦶

به هدفم نزدیکتر شده باشم 🧡😊

میدونی نباید از سختی راه ترسید 🏃🏻‍♂️

وقتی هدف تو تعیین می کنی اول از همه باید هر چی ترس توی خودت داری بکشیشون 🚫

آره هیچوقت نمیتونیم از رویاهمون دست بکشیم. 🌱🏃🏻‍♂️🧡

انتشارات

و در آخر باید اینو بگم که باید انجام بدیم! 😊😊

هیچکس برای هدف و رویا ما تلاش نمیکنه... 😊🧡

اگه خواستی با ماهلین در ارتباط باشی و ستاره پر نور ما باشی 👉

شماره تماس

📞 ۰۹۱۲۴۴۹۰۶۲۵

☎️ ۰۲۱۶۶۰۹۱۲۴۱

آدرس پیج و کانال تلگرام

📷📞 Mahlin_books

فهمیه رئیسی

ماهلین | ماه آسمان نشر ایران ✨📚



مقدمه مؤلف

سلام رفیق 😊

مرسی که هستی تا دو دقیقه باهم گپ بزنیم ...
یه زمانی منم مثل تو بودم پشت میز دانش آموزی. تنها آرزوم قبول شدن در رشته مورد علاقه و بورسیه گرفتن در دانشگاه های آلمان بود. هیچ موفقیتی بدون تلاش و شکست به وجود نمیاد موفقیت پستی بلندی داره پیچ و خم های زیادی داره اگه مسیر صاف بود که همه وارد این مسیر میشدن تا به هدفشون برسن پس تو اونقدر قوی هستی که وارد شدی و اونقدر لیاقت داری که بهش برسی 😊
رسیدن به هدف آسون نیست فراز و نشیب های خودشو داره که با مطالعه و آموزش دیدن و تلاش کردن می توان مشیر موفقیت رو طی کرد که باید با هر کدوم از درسا به روش و شیوه درست خودش برخورد کرد. زمانی که مثل خودت دانش آموز بودم تمام دغدغه ام این بود که کتابی داشته باشم که تمام نکات تشریحی و تستی رو داشته باشه تست های جون دار داشته باشه ولی کتابی پیدا نمیشد که همه فن حریف باشه گاهی یه کتاب رو چند نفر با هم مشترک استفاده می کردیم یا کتابی گیر نمیومد که نکات تستی رو گفته باشه خلاصه کلام این که کمبود منبع خوبی برای ریاضی حس میشد.

ولی شما دیگه نگران نباشید تو این راه تنها نیستید من کنارتونم تجربیات چند سال تدریس ریاضی کنکور تجربیات چند سال تحصیل در دانشگاه هامبورگ آلمان و شهید رجایی و همچنین تجربه یک دانش آموز کنکوری که موفق شد با درصد ۹۲ در درس ریاضی قبول شه 😍 باعث شد تا قلم من روی کاغذ به حرکت در بیاد و این کتاب رو برای شما بنویسم 📖✍️
از این به بعد قراره باهم **غوووووول ریاضی** بشیم قراره ریاضی شیرین و شیرین تر بشه

این کتابی که پیش شماست حاصل تلاش های بی وقفه من هستش که تک تک کلماتش رپ با هق علاقه نوشتم از کاری رو با عشق ، علاقه و تلاش انجام بدید حتما بهش می رسید

راستی اینم بگم که هر شکستی رو یه شروع دوباره و انگیزه ادامه دادن بدونین کم نیارین و پر انرژی به راهتون ادامه بدین
در این کتاب سعی کردم سوال هایی رو بنویسیم که هر کدوم دارای یک نکته آموزشی داشته باشه برخی از سوال ها از کنکور های سال های قبل و برخی از موسسه های آموزشی دیگه انتخاب شده و بیشتریا تالیفی هستش پس بیاید که باهم ریاضی رو شیرین ترش کنیم با نام خدا استارت رو بزنیم 🤖😎

به پاس تشویق های خانوادم که در این راه تنها حامی و پشتیبان من بودن تقدیم میکنم به پدر و مادر عزیزم ❤️

♥️ مخلص شما مهسا شفیعی ♥️

به نام خدایی که نگاهش معجزه زندگی من بود

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

- درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی ۷
درس دوم: متمم یک مجموعه ۱۳
درس سوم: الگو و دنباله ۱۵
درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی ۱۹

فصل ۲: مثلثات

- درس اول: نسبت‌های مثلثاتی ۵۴
درس دوم: دایره مثلثاتی ۶۰
درس سوم: روابط بین نسبت‌های مثلثاتی ۶۷

فصل ۳: توان‌های گویا و عبارتهای جبری

- درس اول: ریشه و توان ۹۱
درس دوم: ریشه n ام ۹۴
درس سوم: توان‌های گویا ۹۷
درس چهارم: عبارتهای جبری ۹۹

فصل ۴: معادله‌ها و نامعادله‌ها

- درس اول: معادله درجه دوم و روش‌های مختلف حل آن ۱۳۷
درس دوم: سهمی ۱۴۲
درس سوم: تعیین علامت ۱۴۷

فصل ۵: تابع

- درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن ۲۰۳
درس دوم: دامنه و برد توابع ۲۰۶
درس سوم: انواع تابع ۲۱۲

فصل ۶: شمارش، بدون شمردن

- درس اول: شمارش ۲۶۳
درس دوم: جایگشت ۲۶۸
درس سوم: ترکیب ۲۷۰

فصل ۷: آمار و احتمال

- درس اول: احتمال یا اندازه‌گیری شانس ۳۰۵
درس دوم: مقدمه‌ای بر علم آمار، جامعه و نمونه ۳۱۹
درس سوم: متغیر و انواع آن ۳۲۱

فصل اول

مجموعه، الگو و دنباله



درس سوم: الگو و دنباله
درس چهارم: دنباله های حسابی و هندسی

درس اول: مجموعه های منتهای و نامتناهی
درس دوم: متمم یک مجموعه

درس اول: مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

تعاریف اولیه مجموعه‌ها

- مجموعه، دسته‌ای از اعضا است که خوب مشخص شده باشد. مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} نقش مهمی در مباحث ریاضی دارد.
- با دسته‌بندی کردن یک سری اشیاء به یک مجموعه می‌رسیم که آن اشیاء عضوهای مجموعه هستند مثلاً مجموعه اعداد اول یک رقمی که می‌شود $\{2, 3, 5, 7\}$ و یا مجموعه اعداد صحیح که قدمطلق آن‌ها کوچک‌تر از ۴ باشد که می‌شود $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
- $a \in A$ یعنی متعلق به مجموعه A است و $a \notin A$ یعنی a متعلق A نیست. مثلاً مجموعه $A = \{\{1, 2\}, 1, \{2\}\}$ ببینید در مورد این مجموعه می‌توان گفت $\{1, 2\} \in A$ و $1 \in A$ و $\{2\} \in A$ ، چون که هر یک از آن‌ها (منظورمان $\{1, 2\}$ ، 1 و $\{2\}$ هستش) متعلق به مجموعه A هستند.
- مجموعه تهی، به مجموعه‌ای می‌گوییم که هیچ عضوی ندارد. آن را با نماد \emptyset یا $\{\}$ نشان می‌دهیم.
- زیرمجموعه: مجموعه‌های A و B را در نظر بگیرید. اگر هر عضو A ، متعلق به B باشد، می‌گوییم A زیرمجموعه B است و می‌نویسیم: $A \subseteq B$ ، اگر A زیرمجموعه B نباشد می‌نویسیم: $A \not\subseteq B$.

نکته: این را هم بگوییم که هر مجموعه‌ای، زیرمجموعه خودش است. ضمناً مجموعه تهی، زیرمجموعه هر مجموعه‌ای می‌باشد.

مثال $A = \{a, \{a\}, \emptyset\}$ را بنویسید.

پاسخ: زیرمجموعه صفر عضوی آن می‌شود $\{\}$.

زیرمجموعه‌های یک عضوی آن می‌شوند $\{a\}, \{\{a\}\}, \{\emptyset\}$.

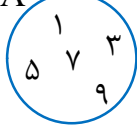
زیرمجموعه‌های دو عضوی آن می‌شوند: $\{a, \{a\}\}, \{a, \emptyset\}, \{\{a\}, \emptyset\}$.

زیرمجموعه سه عضوی آن می‌شود: $\{a, \{a\}, \emptyset\}$.

مجموعه‌ها را می‌توانیم با نوشتن عضوهایشان به صورت نمودار ون و یا با استفاده از نمادهای ریاضی نشان دهیم.

مجموعه به صورت مقابل:

مجموعه اعداد فرد یک رقمی $A = \{1, 3, 5, 7, 9\} = \{2n - 1 | n \in \mathbb{N}, n < 6\}$



نمودار ون هم به صورت مقابل

تذکر: مجموعه اعداد زیر را فراموش نکنید.

مجموعه اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

مجموعه اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

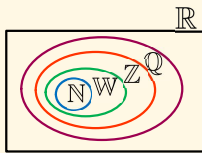
مجموعه اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

مجموعه اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$

مجموعه اعداد گنگ: $\mathbb{Q}' = \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$

مجموعه اعدادی که نتوان آن‌ها را به صورت نسبت دو عدد صحیح نمایش داد.

مجموعه اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$



نکته: واضح است که $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

(یعنی می‌توان گفت همه مجموعه‌های اعدادی که تا الان داریم، زیرمجموعه‌هایی از مجموعه اعداد حقیقی هستند.)

۶ حواستان به اعداد گنگ (\mathbb{Q}') باشد. اجتماع آن‌ها با اعداد گویا، اعداد حقیقی را می‌دهد (یعنی $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R}$) و هیچ‌گونه اشتراکی با اعداد گویا ندارند. (یعنی $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$ تهی است)

اعدادی مثل 3 ، $-\frac{1}{2}$ ، $-\frac{3}{8}$ و $\sin \frac{\pi}{2}$ اعداد گویا و اعداد مثل π ، $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ و e (عدد نپر) اعدادی گنگ هستند.

یک سری اعداد اعشاری هم هستند که به آن‌ها اعداد اعشاری متناوب گفته می‌شود. در این اعداد، همه ارقام بعد از ممیز با برخی از آن‌ها، مرتباً تکرار می‌شوند. مثل $2/3333\dots$ که به صورت $2/3$ نوشته می‌شود، یا $3/151515\dots$ که همان $3/15$ است و یا $0/18717171\dots$ که $0/1871$ است. این اعداد هم متعلق به مجموعه اعداد گویا هستند.

نکته: اعداد اعشاری که ارقام بعد از ممیز آن‌ها نامختوم و نامتناوب است یعنی مرتباً تکرار نمی‌شوند، هم اعداد گنگ می‌باشند.

مثلاً مجموعه $A = \{\{1, 2\}, \{2\}\}$ ببینید. در مورد این مجموعه می‌توان گفت $\{1, 2\} \in A$ و $1 \in A$ و $\{2\} \in A$ ، چون که هر یک از آن‌ها (منظورمان $\{1, 2\}$ ، 1 ، $\{2\}$ هستند) متعلق به مجموعه A هستند.



مثال ۲) کدام مجموعه زیر دارای بزرگ‌ترین عضو است؟

(۱) $\{x \in \mathbb{Q}' \mid x > 10\}$ (۲) $(-10, +\infty)$

(۳) $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 - 1 \leq 8\}$ (۴) \mathbb{Z}

پاسخ: همه گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

(۱) بزرگ‌ترین عدد گنگ بزرگ‌تر از ۱۰ وجود ندارد.

(۲) در بازه $(-10, +\infty)$ بزرگ‌ترین عضو وجود ندارد.

(۳) از نامساوی $x^2 - 1 \leq 8$ نتیجه می‌گیریم $x^2 \leq 9$ ، پس $|x| \leq 3$ و در نتیجه $-3 \leq x \leq 3$. بنابراین بزرگ‌ترین عدد گویای موجود وقتی که $-3 \leq x \leq 3$ است، برابر $x = 3$ می‌باشد.

(۴) مجموعه اعداد صحیح (یعنی $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$) بزرگ‌ترین عضو ندارد. بنابراین گزینه (۳) درست است.

خودت حل کن! :

اگر A مجموعه‌ای باشد که به ازای هر a دلخواهی از این مجموعه، $-a$ نیز متعلق به مجموعه باشد، A کدام یک از مجموعه‌های زیر تهی نمی‌تواند باشد؟

(۱) \mathbb{Q}' (۲) \mathbb{Q} (۳) \mathbb{N} (۴) \mathbb{Z}

پاسخ: گزینه ۳

ماهلیین

تعریف بازه

بازه (فاصله) به زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} گفته می‌شود که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص (مثل a و b) هستند.

اگر a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند، به طوری که $a < b$ ، آن‌گاه خواهیم داشت:

(a, b) باز $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

[a, b] بسته $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$

[a, b) نیم باز $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

(a, b] نیم باز $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$

[a, +∞) نیم باز $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

(-∞, b] نیم باز $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$



$(a, +\infty)$ باز $\{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

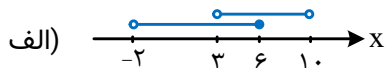
$(-\infty, b)$ باز $\{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

$(-\infty, +\infty)$ باز $\{x \in \mathbb{R}\}$ مجموعه تمام اعداد روی محور حقیقی

برای یادآوری اجتماع و اشتراک و نحوه تفاضل بازه‌ها به مثال‌های زیر توجه کنید.

الف) $(-2, 6] \cup (3, 10)$

اجتماع



$\Rightarrow (-2, 6] \cup (3, 10) = (-2, 10)$

ب) $[-3, 2) \cap [0, +\infty)$

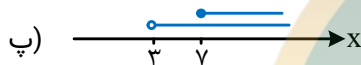
اشتراک



$\Rightarrow [-3, 2) \cap [0, +\infty) = [0, 2)$

پ) $(3, +\infty) - [7, +\infty)$

تفاضل



$\Rightarrow (3, +\infty) - [7, +\infty) = (3, 7)$

نکته: حواستان به چهار مورد زیر باشد. $(a < b)$



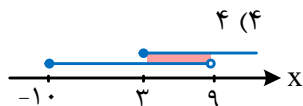
الف) $\mathbb{R} - [a, b]:$ $\Rightarrow (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$

ب) $\mathbb{R} - (a, b):$ $\Rightarrow (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$

پ) $\mathbb{R} - [a, b):$ $\Rightarrow (-\infty, a) \cup [b, +\infty)$

ت) $\mathbb{R} - (a, b]:$ $\Rightarrow (-\infty, a] \cup (b, +\infty)$

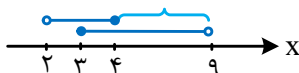
مثال ۳) بازه $A = ([3, +\infty) \cap (-10, 9)) - (2, 4)$ شامل چند عدد طبیعی است؟



$\Rightarrow [3, +\infty) \cap (-10, 9) = [3, 9)$

$\Rightarrow [3, 9) - (2, 4) = [3, 9)$

بنابراین بازه به دست آمده شامل اعداد طبیعی ۵، ۶، ۷، ۸ می‌باشد. پس گزینه (۲) درست است.



پاسخ:



خودت حل کن ۲:

کدام گزینه یک بازه بسته را نشان می‌دهد؟

- (۱) $[-6, 3) - [1, 9)$
 (۲) $[-10, 4) - (-1, 5)$
 (۳) $(-\infty, 5] \cup [-1, 6]$
 (۴) $(-\infty, 25) \cap [20, +\infty)$
- پاسخ: گزینه ۲

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن برابر یک عدد حسابی باشد با پایان باشد، مجموعه متناهی می‌نامیم. مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی نتوان بیان کرد بی‌پایان باشد، مجموعه نامتناهی می‌نامیم.

مثال

- نامتناهی $(0/2)$ (ج)
 نامتناهی \mathbb{Z} (ب)
 نامتناهی = مجموعه دایره‌های به مرکز مبدأ مختصات (ح نامتناهی) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ (پ)
 نامتناهی = مجموعه اعداد طبیعی فرد (خ)
 نامتناهی $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ (ت)
 نامتناهی = مجموعه اعداد اول یک رقمی (ث)

نکته: به جدول زیر دقت کنید. ماهلین

مجموعه	$A \cup B$	$A \cap B$	$A - B$	$B - A$
A متناهی و B نامتناهی	نامتناهی	متناهی	متناهی	نامتناهی
A متناهی و B متناهی	متناهی	متناهی	متناهی	متناهی
A نامتناهی و B نامتناهی	نامتناهی	نامتناهی	متناهی یا نامتناهی	متناهی یا نامتناهی

نکته:

- (۱) اگر $A \subseteq B$ متناهی باشد، آن‌گاه B می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.
 (۲) اگر $A \subseteq B$ و A نامتناهی باشد، آن‌گاه حتماً B نامتناهی است.
 (۳) اگر $A \subseteq B$ و B متناهی باشد، آن‌گاه حتماً A متناهی است.
 (۴) اگر $A \subseteq B$ و B نامتناهی باشد، آن‌گاه A می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد.



مثال؟ اگر A یک مجموعه دلخواه و $\mathbb{Z} - A$ نامتناهی و متناهی باشد، متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را بررسی کنید.

(ب) $\mathbb{Z} - (A - \mathbb{N})$

(الف) $\mathbb{Q}' - (\mathbb{Z} - A)$

◀ پاسخ:

(الف) چون $\mathbb{Z} - A$ یک مجموعه متناهی و \mathbb{Q}' یک مجموعه نامتناهی است، پس $\mathbb{Q}' - (\mathbb{Z} - A)$ یک مجموعه نامتناهی می‌باشد.

(ب) اعضای مجموعه \mathbb{N} در مجموعه $A - \mathbb{N}$ وجود ندارند، پس مجموعه $\mathbb{Z} - (A - \mathbb{N})$ همه اعضای مجموعه \mathbb{N} را دارا است، بنابراین $\mathbb{N} \subseteq (\mathbb{Z} - (A - \mathbb{N}))$ است و با توجه به نامتناهی بودن \mathbb{N} ، نتیجه می‌گیریم که حتماً مجموعه $\mathbb{Z} - (A - \mathbb{N})$ یک مجموعه نامتناهی است.

خودت حل کن ۳:

اگر A مجموعه‌ای نامتناهی و B مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام مجموعه نامتناهی است؟

(۴) $A \cap B$

(۳) $(A - B) - A$

(۲) $B - A$

(۱) $A - B$

◀ پاسخ: گزینه ۱

ماهلین
انتشارات



mahsa.shafiei.math

گروه آموزشی مهسا شفیعی